# Colles de Maths - semaine 4 - MP-MP*
# Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

**Choses à retenir** Pour déterminer la nature d'une série (grosso modo, par ordre de priorité) :

1. Si le terme général est positif, le comparer à quelque chose de plus simple (majoration ou équivalent) ;
2. Sinon, essayer d'obtenir un développement asymptotique qu'on arrête au premier terme absolument convergent (ou positif divergent) ;
3. Utiliser le critère spécial des séries alternées si besoin ;
4. Regrouper par paquets (par exemple, pour les termes généraux ayant un comportement périodique, ou faisant apparaître une fonction discontinue comme la partie entière...) ;
5. Voir s'il n'y a pas un télescopage (surtout si l'on demande de calculer la somme) ;
6. Revenir à la suite des sommes partielles plutôt que de regarder le terme général seulement :
   — Les majorer si le terme général est positif ;
   — Utiliser une comparaison série-intégrale si le terme général fait apparaître une fonction décroissante ou croissante ;
   — Utiliser une transformation d'Abel.

**Exercice 1** (*) Quelle est la nature des séries suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \cos\left(n^2\,\pi \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$ ;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^{\binom{n}{3}}}{n}$ ;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n\, f(1/n)$ où $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ ;
4. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^n\, a^n}{\sum_{k=1}^n k!}$ en fonction de $a > 0$.

**Exercice 2** (*) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{(\ln(n+1))^2}{\ln n\, \ln(n+2)}\right)$ ? Calculer sa somme.

**Exercice 3** (*) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictements positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et en cas d'existence $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

1. Si $\sum u_n$ diverge, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$.
2. Si $\sum u_n$ converge, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha < 1$.
3. Application : Remontrer le critère de Bertrand à l'aide de 1.

*On pourra aider les élèves sur les intégrales généralisées, qu'ils n'ont pas encore vues (mais on n'en a pas besoin dans la première question.)*

**Exercice 4** (***) Trouver un équivalent quand $n$ tend vers l'infini de

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n k^k\right)^{1/n}.$$

**Exercice 5** (**) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive décroissante qui tend vers 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence leurs sommes sont égales.

*Conséquence (qui découle aussi de Fubini) : Si* $\sum u_n$ *est une série convergente à termes positifs, et si* $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, *alors* $\sum R_n$ *et* $\sum n\, u_n$ *ont même nature et en cas de convergence, leurs sommes sont égales.*